Carpeta de Matemática 1
Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 1

Nueva carpeta de Matemática IV

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa
Nora Legorburu - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

1. Los números reales 3
Revisión inicial 4
Operaciones con números racionales 5
Ampliación del campo numérico: los números reales 6
Los irracionales en la recta numérica 7
Intervalos e inecuaciones en la recta real 8
Módulo o valor absoluto 10
Ecuaciones con módulo 11
Inecuaciones con módulo 12
Raíz enésima de un número real 13
Propiedades de la radicación 14
Aproximación de expresiones decimales 15
Errores de aproximación 16
En el mundo real 17
Los números irracionales y el papel 17
El número π: un desafío histórico 18
Más actividades 19
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 1 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática IV.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

COPIEDICIÓN
Maricel Besse

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
María Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Estudio DOBLEVUELO

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Ivana Dodero en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0076-3
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática IV / Carlos Abdala...[et.al.]. ; adaptado por Ruth Schaposchnik. - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
192 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0076-3

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, adapt.
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en marzo de 2008 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

1 LOS NÚMEROS REALES

Los antiguos griegos descubrieron ciertos números, a los que asociaron con segmentos que llamaron *inconmensurables*, porque notaron que no podían representarse con fracciones exactas de ninguna unidad. Estos números son los *irracionales* y, junto con los racionales, forman el conjunto de los *números reales*.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Marquen con una cruz los conjuntos numéricos a los cuales pertenece cada número, siempre que corresponda. Recuerden cómo se designan los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$ (naturales); $\mathbb{Z}$ (enteros); $\mathbb{Q}$ (racionales).

	$3,\hat{2}$	-4	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$1,\hat{9}$	$2,01$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{2}$	$1,9$
$\mathbb{N}$									
$\mathbb{Z}$									
$\mathbb{Q}$									

2 Completen.

a) Coloquen $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

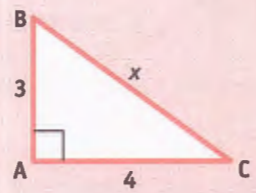
I. $\frac{2}{3}$ ⬭ $0,6$ II. $-2,6$ ⬭ $-2,5$ III. $0,16$ ⬭ $0,16$

b) Escriban la fracción irreducible o la expresión decimal, según corresponda.

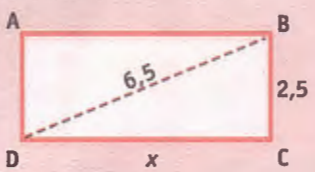
Fracción irreducible	$\frac{3}{5}$						$-\frac{3}{5}$	
Expresión decimal		$0,9$	$-2,5$	$0,1\hat{6}$	$-0,5$	$-0,\hat{5}$		$-1,\hat{2}$

3 En las siguientes figuras, las medidas están expresadas en centímetros. Averigüen en cada caso la medida de x. Aproximen por redondeo a los centésimos cuando sea necesario.

a)

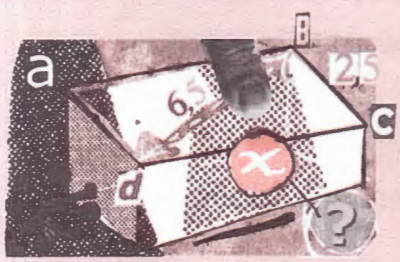


b)



4 Completen el cuadro con el producto de las expresiones de las filas y las columnas que se cruzan.

·	a^4	$\frac{1}{a^2}$	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$	$\left(a^{-2}\right)^{-3}$	a
$\left(a^2\right)^{-1}$					
$\frac{1}{a^3}$					
$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$					



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Operaciones con números racionales

5 Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $0,\widehat{2} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)^{-2}$

b) $\sqrt[3]{1 - 0,875} - \left[-\frac{1}{5}\left(2 - \frac{3}{4}\right)\right]^{-1}$

c) $(0,3)^4 : (0,3)^5 - \left[1,\widehat{3} - \left(-1 - \frac{1}{2}\right)\right] - 0,\widehat{9}$

d) $-\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{7}\left(2 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{18}{7}\right)^0\right] - 1$

e) $\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{8}}{1 + \frac{1}{8}}}$

f) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 - \sqrt{0,\widehat{2} : 2}$

6 Manuel quiere pintar su habitación con dos manos de pintura (las cuatro paredes y el techo). Las medidas son: 3,6 m de largo, 3,2 m de ancho y 2,6 m de alto. El 10% de la superficie de las paredes está ocupada por las aberturas.

a) ¿Cuál es la superficie total por pintar?

b) Cada litro de pintura rinde alrededor de 12 m^2. ¿Cuántos litros de pintura tiene que comprar?

c) El litro de pintura cuesta $ 5,50 + IVA, y el presupuesto por mano de obra es de $ 1000. Calculen el costo total de la obra, teniendo en cuenta que el IVA es un 21%.

7 Resuelvan las siguientes ecuaciones.

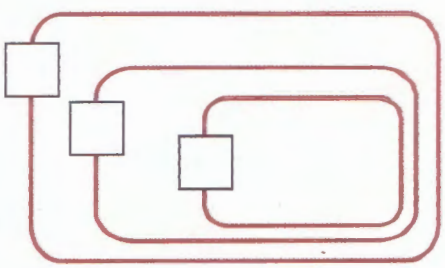
a) $\sqrt{x + 1} - 4 = 0$

b) $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{3 \cdot x - 2}{2} = \frac{1}{4} x$

c) $2 \cdot x^2 - 1 = 7$

d) $\frac{2}{3} \cdot (3 \cdot x - 6) - \frac{1}{2} \cdot (x + 4) = 2 - x$

8 Coloquen el símbolo que identifica a cada conjunto numérico en la etiqueta que corresponda, y ubiquen en el diagrama los números que obtuvieron como resultados en las actividades 5 y 7.



9 Indiquen si las siguientes igualdades son válidas para cualquier par de números racionales a y b. Para las que no lo sean, muestren un contraejemplo.

a) $2a^2 + 2a^2 = 4a^4$ .....

b) $\sqrt{9 \cdot a^2} = 9 \cdot a$ .....

c) $\frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$ .....

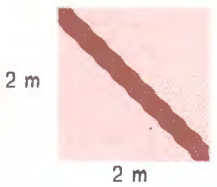
d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ .....

e) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ampliación del campo numérico: los números reales

10 Para hacer una bandera que represente al curso, los chicos de 1.º A tienen un cuadrado de tela de 2 m de lado y quieren pegarle una tira de otro color a lo largo de la diagonal, como se muestra en la figura. Cecilia dice que no les alcanzan los 2 m de cinta que tienen, y que hay que comprar $\frac{3}{4}$ m más para añadirla a la diagonal de la bandera. Martín dice que, al menos, necesitarán $\frac{7}{8}$ m más de cinta.

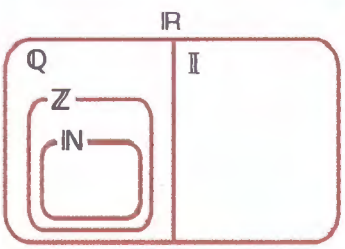


a) ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

b) ¿Es posible expresar la medida de la diagonal del cuadrado de la figura como una fracción?

Para leer y recordar

- Los *números racionales* son los que pueden expresarse en forma de fracción. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden ser expresadas en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.
- Los *números irracionales* son los que no son racionales, es decir, aquellos que no pueden expresarse en forma de fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.



La unión del conjunto ℚ de los números racionales con el conjunto 𝕀 de los números irracionales forma el conjunto 𝕀R de los números reales.

Por ejemplo, son números irracionales:

- Las raíces de los números naturales cuyos resultados no son naturales: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{6}$.
- Expresiones decimales generadas con cierto criterio, de modo tal que la cantidad de cifras decimales resulten infinitas: 0,123456...; −45,01001000100001... (los anotamos con tres puntos suspensivos para indicar que la secuencia sigue en las cifras decimales).
- Números "especiales": $\pi \cong 3{,}1415...$ $e \cong 2{,}7182...$ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

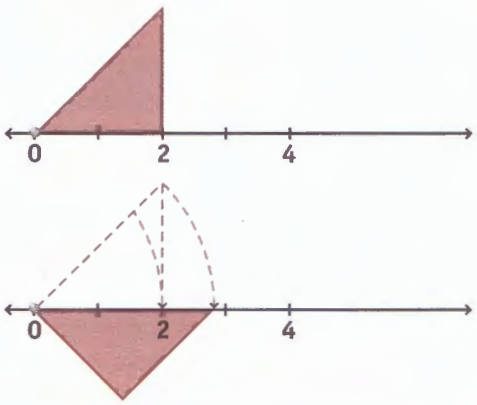
11 ¿A qué conjuntos numéricos pertenecen los resultados de los siguientes cálculos? Coloquen cruces en los casilleros correspondientes.

Cálculos	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	𝕀R
7 − 4 : 2					
7 − 4 . 2					
(7 + 2) : (−4)					
$\sqrt{7-4\,.\,2}$					
$\sqrt{(7+2):4}$					
$\sqrt{(7-2)\,.\,4}$					

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

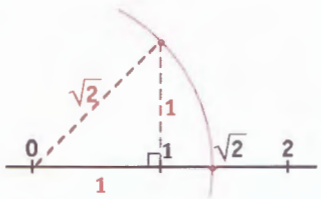
Los irracionales en la recta numérica

12 Laura construyó un triángulo rectángulo de cartulina con dos lados iguales de 2 cm; lo apoyó sobre una hoja en la que había trazado una recta graduada en centímetros y lo fijó con una chinche al papel, como muestra la figura.
A continuación, hizo girar el triángulo 45° en el sentido de las agujas del reloj.
¿Sobre qué punto exacto de la recta, quedó apoyado el vértice libre del triángulo?



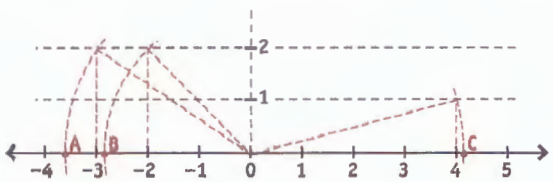
Para observar

Los números irracionales cuya expresión exacta es un radical pueden ubicarse en la recta numérica utilizando el procedimiento que se muestra en el ejemplo siguiente.
Para ubicar $\sqrt{2}$, podemos hacer así:



- **Tomamos como unidad de medida la unidad considerada en la recta, y construimos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1. La medida de su hipotenusa es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.**
- **Con un compás, y con centro en 0, marcamos un arco de circunferencia de radio igual a la hipotenusa, y así trasladamos su medida, que es $\sqrt{2}$, a un punto de la recta.**

13 Indiquen qué números irracionales fueron representados en la recta numérica mediante letras.



.....

.....

.....

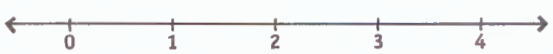
14 Observen la siguiente lista de números.

a) Ordénenlos de menor a mayor.

$\sqrt{6}$; 1,732; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}$; 1,3; 1,42; $\sqrt{5}$; $1,4\widehat{1}$; 1,41; 1,333333; $\sqrt{10}$.

.....

b) Representen en la recta numérica los que sean irracionales.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Intervalos e inecuaciones en la recta real

15 Para viajar desde su casa hasta su trabajo en colectivo, Claudio tarda, como mínimo, media hora y, a lo sumo, una hora y cuarto. Si siempre sale de su casa a las 9 de la mañana, ¿entre qué horas llega al trabajo? Expresen la respuesta en forma simbólica.

.....

16 Raúl es lanzador de bala y sabe que, con buena suerte, puede lanzar la bala a 60 m. Si para poder entrar en los juegos panamericanos, debe lanzarla, cómo mínimo, a la tercera parte de su récord, ¿cuáles son las marcas que debe registrar para poder competir? Escriban la respuesta simbólicamente.

.....

17 ¿Cuáles son los números reales cuya distancia al cuatro es menor o igual a dos? Márquenlos sobre la recta numérica.

18 ¿Cuáles son los números reales cuya distancia al cuatro es mayor que dos? Márquenlos sobre la recta numérica.

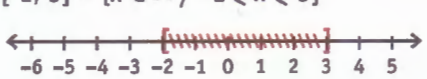
Para observar

Los siguientes ejemplos muestran cómo se pueden expresar algunos subconjuntos de números reales, en forma de *intervalos*.

La expresión $x \in \mathbb{R}$ / se lee "*x* perteneciente a $\mathbb{R}$ tal que".

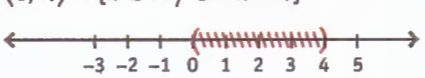
- ***Intervalo cerrado*:**

$[-2; 3] = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leqslant x \leqslant 3\}$



- ***Intervalo abierto*:**

$(0; 4) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 4\}$

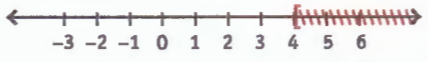


- ***Intervalo semiabierto*:**

$[-3; 2) = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leqslant x < 2\}$

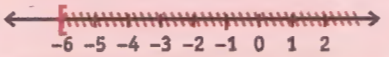
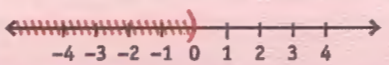
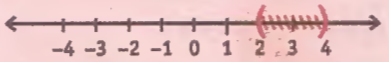
- ***Intervalo infinito*:**

$[4; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 4\}$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

19 Completen la siguiente tabla.

Inecuación	Intervalo	Tipo de intervalo	Recta numérica
$-3 \leq x < 4$			
			
	$[-1; 1]$		
			
$0 \leq x \leq 6$			
$\frac{1}{2} < x \leq 1$			
			
	$\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$		

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

20 Cada auxilio mecánico de una autopista cubre una distancia sobre ella de 40 km y tiene su cabecera en el centro de su zona de atención. Si uno de los auxilios tiene cabecera en el kilómetro 130, ¿cómo expresarían matemáticamente entre qué kilómetros, sobre la autopista, opera ese auxilio?

21 La distancia de un número al cero es igual a 7. ¿Cuáles son los números reales que cumplen con esta condición?

.....

22 La distancia entre un número y 5 es igual a 2. ¿Cuáles son los números reales que cumplen con esta condición?

.....

Módulo o valor absoluto

Para leer y recordar

- Llamamos *módulo* o *valor absoluto* de un número real x a la distancia entre dicho número y el cero. Lo simbolizamos $|x|$, y como toda distancia, nunca toma valores negativos, es decir: $|x| \geq 0$ para cualquier valor de x.

Formalmente, se define así:

Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$

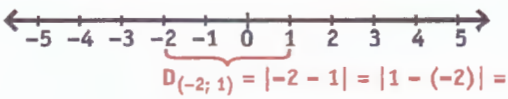
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$

Ejemplos

$|-2,5| = |2,5| = 2,5$

- El módulo nos permite expresar, también simbólicamente, la *distancia D* entre dos números reales x e y:

$$D_{(x;\,y)} = |x - y| = |y - x|$$



Algunas propiedades del módulo

Para todo número real x, se cumple que:

- $|x| = |-x|$

- $\sqrt{x^2} = |x|$

Si $a > 0$:

- $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

- $|x| > a \Rightarrow x > a$ o $x < -a$

23 Escriban el módulo de los siguientes números.

a) $\left|\sqrt{\frac{4}{9}}\right| =$ ____

b) $|-2,\widehat{34}| =$ ____

c) $|(-6)^3| =$ ____

d) $\left|\sqrt[3]{-27}\right| =$ ____

e) $\left|-\sqrt[4]{0,0016}\right| =$ ____

f) $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}\right| =$ ____

24 Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $|-1 - 8| + 0,2 =$ .....

b) $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \left|1 - \frac{5}{2}\right|\right) =$ .....

c) $\left(\left|0,2 - \frac{1,5}{0,5}\right| + |1,3 - 2,6|\right)^2 =$ .....

d) $\sqrt[3]{\left|\frac{1}{9} - 0,\widehat{3}\right| - \left|0,\widehat{1} - \frac{8}{27}\right|} =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones con módulo

25 Gonzalo resolvió las siguientes ecuaciones. Corrijan los errores que encuentren.

a) $x^2 = \frac{1}{9}$	b) $x^3 = 125$	c) $x^4 = \frac{81}{16}$	d) $x^5 = 1$
$\lvert x\rvert = \sqrt{\frac{1}{9}}$	$x = \sqrt[3]{125}$	$\lvert x\rvert = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$	$\lvert x\rvert = \sqrt[5]{1}$
$x = \frac{1}{3}$	$x = 5$	$\lvert x\rvert = \frac{3}{2}$	$\lvert x\rvert = 1$
		$x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = -\frac{3}{2}$	$x_1 = 1$ $x_2 = -1$

Para observar

En los siguientes ejemplos, observen cómo se resuelven algunas ecuaciones que involucran módulos.

$|x| = 2$

$x_1 = 2$ $x_2 = -2$

$|x - 5| = 2$

$x - 5 = 2$ $x - 5 = -2$

$x = 2 + 5$ $x = -2 + 5$

$x_1 = 7$ $x_2 = 3$

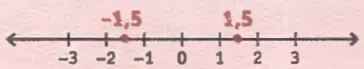
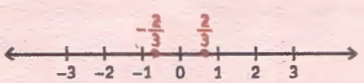
$x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{4}$

$|x| = 2$

$x_1 = 2$ $x_2 = -2$

26 Completen el cuadro.

Ecuación	Representación en la recta real	Soluciones
$\lvert x\rvert = 1{,}5$		$x_1 = 1{,}5$; $x_2 = -1{,}5$
		$x_1 = -4$; $x_2 = 2$
		
		$x_1 = 2$; $x_2 = 5$
$\lvert x + 1\rvert = 1{,}5$		
		$x_1 = -3$; $x_2 = 3$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Inecuaciones con módulo

27 ¿Cuáles son los números enteros que están a más de una unidad de distancia del 5, pero menos de 9? ¿Y los números reales que cumplen la misma condición?

Para observar

En los siguientes ejemplos, observen cómo se resuelven algunas inecuaciones que involucran módulos.

- $|x - 2| < 3$

  $x - 2 < 3$ y $x - 2 > -3$

  $x < 3 + 2$ y $x > -3 + 2$

  $x < 5$ y $x > -1$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-1; 5)$.

$S = (-1; 5)$

- $|x + 3| \geq 1$

  $x + 3 \geq 1$ o $x + 3 \leq -1$

  $x \geq 1 - 3$ o $x \leq -1 - 3$

  $x \geq -2$ o $x \leq -4$

El conjunto solución es la unión del intervalo $(-\infty; -4]$ con el $[-2 +\infty)$.

$S = (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$

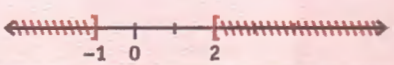
28 Escriban en lenguaje simbólico:

a) Los números reales que están a más de una unidad de distancia del 5.

b) Los números reales que distan del 5 menos que 9.

c) Los números reales que distan del 5 más que 1 y menos que 9.

29 Completen el siguiente cuadro.

Inecuaciones con módulo	Inecuaciones sin módulo	Representación gráfica	Intervalo
$\|x - 3| \leq 1$	$2 \leq x \leq 4$		$[2; 4]$
$\|x + \frac{1}{2}| > 2$			
			
			$[-2; 2]$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Raíz enésima de un número real

30 Calculen la medida de la arista de un cubo de 125 cm^3 de volumen.

.....

31 Calculen la medida de la arista de un cubo, sabiendo que la superficie total de sus caras es 60 cm^2. Aproximen ese valor a los milésimos. ¿Cómo expresarían la medida exacta?

.....

Para leer y recordar

- Llamamos *radical* a una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$), en la cual: n es el índice, y a es el radicando.
- Un radical representa la *raíz enésima* de un número real, que se define así:

  Para n par y $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = m \Leftrightarrow m^n = a$ y $m > 0$

  Para n impar: $\sqrt[n]{m^n} = a \Leftrightarrow a = m^n$
- Todo radical puede expresarse en forma de potencia de exponente fraccionario, según la siguiente regla:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

32 Calculen, en cada caso, el valor de r.

a) $\sqrt[5]{r} = 2$ b) $\sqrt[4]{r} = \frac{3}{2}$ c) $\sqrt[r]{-27} = -3$ d) $\sqrt[r]{512} = 2$

....

33 Expresen las siguientes potencias como raíz.

a) $(-8)^{\frac{1}{3}} =$ ..... c) $36^{0,5} =$ ..... e) $(-125)^{\frac{1}{6}} =$ .....

b) $27^{-\frac{2}{3}} =$ ..... d) $32^{-0,4} =$ .....

34 Apliquen las propiedades de la potenciación y transformen cada una de las siguientes expresiones en una potencia única y una raíz.

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3 =$ ..... c) $\left(m^{\frac{3}{4}} : m^2\right)^{\frac{1}{5}} =$ .....

b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^2 : 2^{\frac{5}{2}} =$ ..... d) $\dfrac{r^{\frac{1}{3}} \cdot r^{-1}}{r^{\frac{4}{3}} : r^{\frac{1}{2}}} =$ .....

35 Expresen como una potencia.

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ b) $a : \sqrt{a}$ c) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$ d) $\sqrt[4]{a} : \sqrt{a^{-1}}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Propiedades de la radicación

Para leer y recordar

- En muchos casos, las propiedades de la radicación nos permiten simplificar los cálculos y transformar expresiones que contienen radicales en otras equivalentes más sencillas.
- Es importante tener presente que las propiedades son válidas sólo en los casos en los que todas las raíces involucradas sean números reales.

Propiedad distributiva

Ejemplos

- $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\quad \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{7}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{6}$

Raíces sucesivas

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$ $\quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$

Simplificación de radicales

- Si n es impar: $\sqrt[n]{x^n} = x$ $\quad \sqrt[5]{(-6)^5} = -6$
- Si n es par: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ $\quad \sqrt[4]{(-8)^4} = |-8| = 8$

36 Resuelvan aplicando las propiedades y simplifiquen las expresiones que obtengan.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{2}}$ b) $\sqrt{\frac{\sqrt[5]{5}}{16}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt{7} \cdot (-32)}$

37 Simplifiquen los siguientes radicales y expresen el resultado como potencia de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[4]{16} =$ ..... d) $\sqrt[6]{(-3)^8} =$ .....

b) $\sqrt[6]{27} =$ ..... e) $\sqrt{(-7)^{10}} =$ .....

c) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{1024}\right)^{-1}} =$ ..... f) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5^5}\right)^2} =$ .....

38 Encuentren el valor de a en cada igualdad.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[a]{7}} = \sqrt[18]{7}$ b) $\sqrt[2a]{\sqrt[4]{(-2)}} = \sqrt[16]{(-2)}$ c) $\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{8}}} = \sqrt[8]{8}$ d) $a \cdot \sqrt[+3]{5} = \sqrt[a]{\sqrt{5}}$

....

....

....

....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Aproximación de expresiones decimales

39 ¿Cómo harían el pedido de los materiales que hay que comprar en cada uno de los siguientes casos, en los que la medida exacta que se necesita es $\sqrt{2}$?

a) Metros de largo de una cinta.

b) Milímetros de un tornillo.

c) Kilómetros de largo de un alambrado.

Para leer y recordar

Recordemos que existen dos formas de aproximar expresiones decimales.

- *Truncar* significa eliminar todas las cifras decimales siguientes a la de un cierto orden *n*.

Ejemplos: Aproximamos por truncamiento a los centésimos: $4{,}3271 \cong 4{,}32$

Aproximamos por truncamiento a los milésimos: $4{,}3271 \cong 4{,}327$

- *Redondear* significa eliminar todas las cifras decimales siguientes a la de un cierto orden *n*; pero en este caso, esta última cifra queda igual cuando la primera eliminada es menor que 5, y, en cambio, aumenta en una unidad cuando la primera cifra eliminada es 5 o mayor que 5.

Ejemplos: Aproximamos por redondeo a los centésimos: $4{,}3271 \cong 4{,}33$

Aproximamos por redondeo a los milésimos: $4{,}3271 \cong 4{,}327$

40 Graciela quiso obtener con su calculadora el resultado de 20 : 3, y se sorprendió al ver la última cifra que aparecía en su visor. ¿Cómo debe interpretarse este resultado?

41 Un terreno con forma de triángulo equilátero que tiene un perímetro de $6\sqrt{7}$ dam, se va a vender a un precio de $12 000 el dam^2. Calculen en forma aproximada:

a) El perímetro del terreno, redondeando a los milésimos.

.....

b) El precio total de venta del terreno, truncando a los décimos la altura y la base del triángulo que forma el terreno.

.....

c) El precio total de venta del terreno, redondeando a los décimos la altura y la base del triángulo que forma el terreno.

.....

d) La diferencia en el precio final, entre una aproximación y la otra.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Errores de aproximación

42 En una ferretería, venden el metro de cable a $ 0,59. El vendedor no tiene monedas de menor valor que la de 10 centavos y no quiere ser injusto a la hora de dar el vuelto a sus clientes.

a) ¿Cuánto le cobraría a Juan si comprara 3,24 m de cable y pagara con $2?

b) ¿Y a Carla, que compró 7,1 m y pagó con un billete de $5?

c) Juan reclamó el vuelto en la primera compra, pero cuando compró 169,3 m de cable, no lo hizo. ¿Por qué creen que sucedió esto?

Para leer y recordar

Al reemplazar una expresión exacta de un número por una aproximación, ya sea truncando o redondeando, se involucra un *error,* relacionado con la diferencia entre la aproximación y el número original. Es importante tener presente que dicho error se propaga a todos los cálculos en los que utilicemos el valor aproximado en lugar del verdadero.

Podemos considerar los siguientes tipos de errores:

- ***Error absoluto*** **(ε_a): es el valor absoluto de la diferencia entre el valor verdadero V_v y el valor aproximado V_a. $\varepsilon_a = |V_v - V_a|$**

Ejemplo:

$6{,}238 \cong 6{,}23$ (por truncamiento) $\longrightarrow$ $\varepsilon_a = |6{,}238 - 6{,}23| = |0{,}008| = 0{,}008$ (I)

$6{,}238 \cong 6{,}24$ (por redondeo) $\longrightarrow$ $\varepsilon_a = |6{,}238 - 6{,}24| = |0{,}002| = 0{,}002$ (II)

La aproximación por redondeo tiene un error menor o igual que por truncamiento.

- ***Error relativo*** **(ε_r): es el cociente entre el error absoluto y el valor aproximado.**

$$\varepsilon_r = \frac{|V_v - V_a|}{V_a}$$

Habitualmente se lo expresa con un porcentaje: $\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \cdot 100$

Ejemplos:

En (I): $\varepsilon_r = \frac{0{,}008}{6{,}23} \cong 0{,}0013 \longrightarrow \varepsilon_{\%} \cong 0{,}13\%$

En (II): $\varepsilon_r = \frac{0{,}002}{6{,}24} \cong 0{,}0003 \longrightarrow \varepsilon_{\%} \cong 0{,}03\%$

43 Se ha aproximado, por redondeo a los décimos, la medida de una viga de 2,37 m de largo, y la de una varilla de metal de 12,37 m.

a) Calculen el error absoluto en ambos casos.

.....

b) Hallen el error relativo involucrado en ambos casos y exprésenlo mediante un porcentaje.

.....

c) Enuncien alguna conclusión.

.....

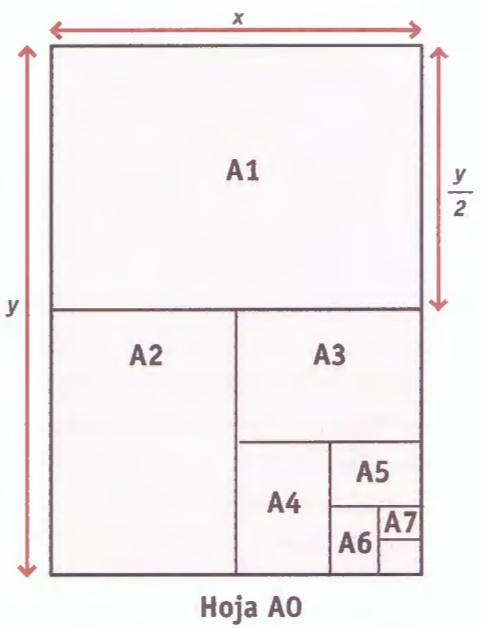
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los números irracionales y el papel

En la fabricación de cierto tipo de hojas de papel rectangular, que habitualmente se comercializan en resmas, se respetan ciertas normas estandarizadas de tamaño. Las más usadas son las del formato DIN A, que se identifican con los códigos A0, A1, A2, etcétera; entre estas, la de uso más difundido es la de formato A4.

La figura muestra la relación geométrica particular con la que se han establecido las medidas para esta serie de formatos.

Si se corta por la mitad una hoja A0, de modo que el corte sea paralelo al lado menor, se obtienen dos hojas de tamaño A1. Si se corta una hoja A1 de la misma manera, se obtienen dos hojas A2, y así sucesivamente. Se obtiene de esta forma una sucesión de rectángulos semejantes.



Hoja A0

44 Pablo trabaja en una imprenta y le encargaron que confeccionara un afiche con el esquema en escala, como el que observan, de 1 metro de ancho. Para calcular cuál debía ser su alto, Pablo razonó así:

A0 es semejante a A1; entonces:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}}$$

a) Calculen la altura exacta de la figura.

.....

.....

b) Calculen dicha altura, aproximada a los centésimos por redondeo.

.....

.....

45 Respondan.

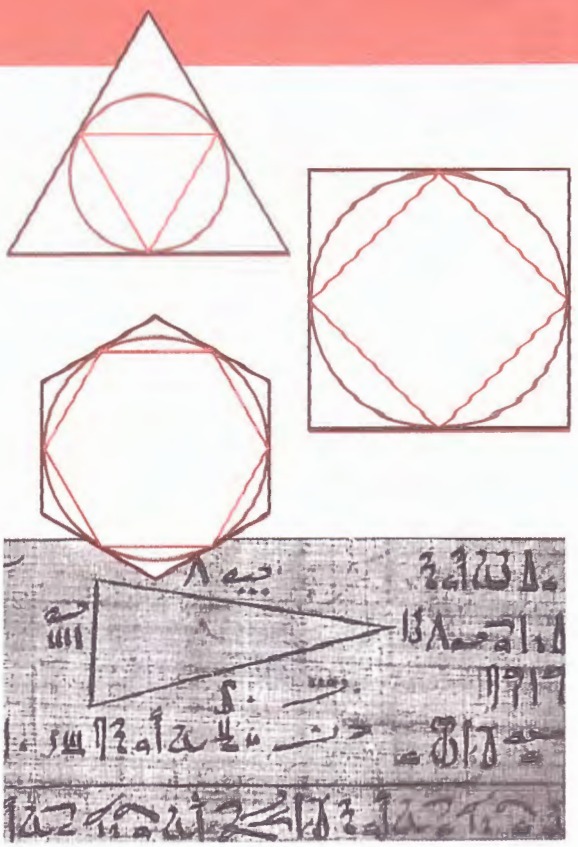
a) ¿Cuál es la razón entre las medidas de las hojas DIN A?

.....

b) Si las hojas A4 miden 29,7 cm x 21 cm, ¿cuáles son las medidas aproximadas de las hojas A1?

.....

El número π: un desafío histórico



El cociente entre el perímetro de una circunferencia y la longitud de su diámetro es el número irracional 3,14159... y se representa con la letra griega π. El matemático suizo Leonhard Euler fue el primero que en 1737 empleó ese símbolo con tal fin.

Algunos historiadores suponen que los antiguos egipcios, cuando construyeron sus pirámides alrededor del año 3000 a. de C., notaron que el cociente mencionado era importante y que, para calcularlo, debían realizar algunas mediciones. Como estas no eran fáciles de realizar, el valor que se podía obtener del cálculo dependía del cuidado de la persona que medía. El valor obtenido en esa época, más próximo al usado en la actualidad fue $\frac{22}{7}$ ó $3\frac{1}{7}$.

Más tarde, por el año 500 a. de C., los griegos trabajaron para deducir el valor de π a partir de las rectas y de las curvas perfectas de la geometría plana que ellos mismos habían creado. Por ejemplo, Arquímedes de Siracusa empleó el **método de exhaución**, que consistía en dibujar polígonos inscriptos y polígonos circunscriptos en una circunferencia de diámetro una unidad y calcular el promedio entre los perímetros (a mayor cantidad de lados, mejor su aproximación). El valor obtenido por este método fue, $\frac{3123}{994}$.

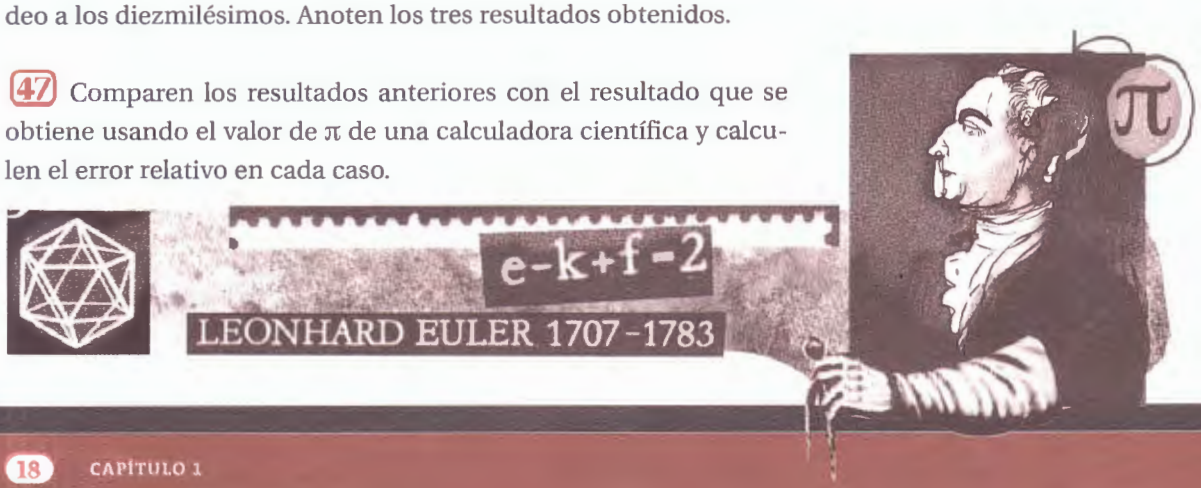
En la Europa del siglo XVI, se usó como fracción: $\frac{355}{113}$, que hasta ese momento era la mejor aproximación, y también en ese siglo, el matemático francés François Vieta dedujo una serie infinita de fracciones para calcular π, y esta es la representación matemática más exacta de su valor.

Ya en 1761, el físico y matemático alemán Johann Lambert demostró que el número π no podía expresarse como un número racional; por lo tanto, π comenzó a ser considerado irracional.

46 Supongan que la tierra es una esfera perfecta de 12 757 km de diámetro y calculen la "distancia" entre el polo norte y el polo sur a lo largo de un meridiano.

Utilicen cada uno de los tres valores de π que aparecen en el texto anterior, aproximados por redondeo a los diezmilésimos. Anoten los tres resultados obtenidos.

47 Comparen los resultados anteriores con el resultado que se obtiene usando el valor de π de una calculadora científica y calculen el error relativo en cada caso.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

48 Resuelvan las siguientes ecuaciones, cuando sea posible.

a) $|x| = 1$

b) $|x| = 6$

c) $|x| = -2$

d) $|x| = \frac{7}{5}$

e) $x^2 - 4 = 5$

f) $(x + 1)^2 = 4$

49 Resuelvan las siguientes inecuaciones. Expresen las soluciones como intervalos y represéntenlos gráficamente en la recta numérica.

a) $|x| < 7$

b) $|x| \geq 5$

c) $|x| \geq \frac{3}{2} \cdot |-6 + 2|$

d) $|\frac{x + 2}{2}| \leq 6$

e) $|-x + 3| \cdot 2 > |6 : 2 - 8|$

50 Representen en la recta numérica los siguientes números.

a) $\sqrt{11}$

b) $2 + \sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

d) $1 + \sqrt{3}$

51 Escriban tres números racionales y tres números irracionales mayores que 2 y menores que $\sqrt{6}$.

52 Inventen tres números irracionales que sean mayores que 3,2 y menores que 3,3.

53 Un comerciante debe transportar objetos cilíndricos de vidrio, de 8 cm de diámetro y 6 cm de altura. Puede optar por dos tipos de cajas, como las descriptas en la tabla.

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Altura (cm)
Caja tipo A	40	32	9
Caja tipo B	56	22	10

a) Expresen en forma exacta:

I. El volumen de uno de los cilindros.

II. El área total de uno de los cilindros.

b) Aproximen por redondeo a los centésimos las medidas que calcularon en el punto a.

c) ¿Cuál es la cantidad máxima de cilindros que pueden entrar en cada caja?

d) El volumen libre en cada caja se llena con un material especial para evitar golpes o, eventualmente, amortiguarlos. Expresen el volumen libre de cada caja:

I. en forma exacta.

II. en forma aproximada, por redondeo a los milésimos.

e) ¿Cuál de las dos cajas elegiría el comerciante, si se deben cumplir dos requisitos: que entre el máximo de cilindros posible y que quede el mínimo de espacio libre?

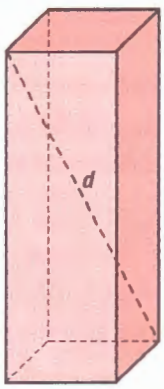
54 Los siguientes números irracionales son las medidas, expresadas en centímetros, de las diagonales de cuatro rectángulos. Encuentren las respectivas medidas de los lados, sabiendo que, expresadas en cm, son números naturales.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{10}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

55 Indiquen el error porcentual que se comete al calcular la diagonal de un cuadrado de 18 cm de perímetro, aproximando ese valor a los centésimos por redondeo.

56 Consideren un prisma de base cuadrada, como el que muestra la figura. Su altura es el triple del lado de la base y la suma de todas sus aristas es 48 cm.



a) Hallen la medida de cada una de las aristas.

b) Calculen su área total.

c) Expresen el valor exacto de la diagonal d.

57 Se depositaron $10 000 en un banco que paga una tasa anual de interés de un 8%, lo que equivale a una tasa proporcional del $0,\widehat{6}\%$ mensual. Los intereses se incorporan al depósito al final de cada mes.

a) Calculen el interés correspondiente a los tres primeros meses, aproximando los valores a los milésimos por truncamiento, cada vez que sea necesario.

b) Calculen el interés correspondiente a los tres primeros meses, aproximando los valores a los milésimos por redondeo, cada vez que sea necesario.

58 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas. Justifiquen sus respuestas.

Si x es un número real positivo comprendido entre 100 y 121,

a) $\sqrt{x} \in [10; 11]$

b) $\frac{x}{\sqrt{x}} < \sqrt{x}$

c) $x^{\frac{3}{2}} \leq 1331$

d) $\sqrt{\sqrt{x}} > \pi$

59 Resuelvan las siguientes inecuaciones y expresen como intervalos el conjunto solución en cada caso.

a) $|x - 4| \leq 8$

b) $|3 \cdot x + 2| \geq |-7 + 2|$

c) $3 + |x - 2| < 6$

d) $-2\,|x + 1| \leq -5$

e) $|5 - x| + 2 \geq 9$

f) $3 + |x + 1| + 2 < 14$

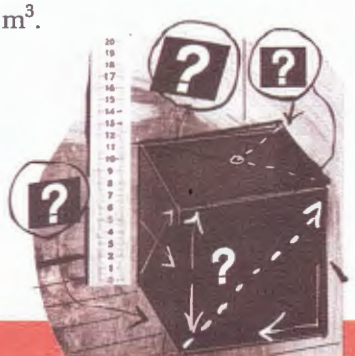
g) $\frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

60 En referencia a un cubo, encuentren la medida pedida en cada caso y exprésenla mediante un radical.

a) La arista, en metros, si la superficie de una cara es $\sqrt[5]{6}\ m^2$.

b) La arista, en centímetros, si la diagonal de una de sus caras mide $\sqrt{10}$ cm.

c) La arista, en metros, si su volumen es $\sqrt[6]{16}\ m^3$.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

61 Se sabe que la suma de las aristas de un cubo es $3\sqrt{6}$ cm.

a) ¿Cuál es, en centímetros, la medida de una arista?

b) ¿Cuánto mide, en centímetros, la diagonal de una cara?

62 Encuentren los valores de x que cumplen con las siguientes igualdades.

a) $|x| = \frac{7}{5}$

b) $|x + 4| = 3$

c) $2 + |x - 1| = 6$

d) $|-x - 4| = |-3|$

e) $x^2 - 4 = 5$

f) $(x + 1)^2 = 4$

63 Desde épocas antiguas, uno de los números irracionales, conocido como el *número de oro*, ha sido muy utilizado por distintas sociedades en el arte, en la arquitectura y en el diseño.

Su expresión exacta es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

¿Cuál es su valor aproximado por redondeo a los centésimos?

64 El número de oro es considerado uno de los *números metálicos*. Otros dos números metálicos son los siguientes.

Número de plata: $1+\sqrt{2}$

Número de bronce: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

a) Representen en una recta numérica los tres números metálicos.

b) Expliquen cómo lo hicieron.

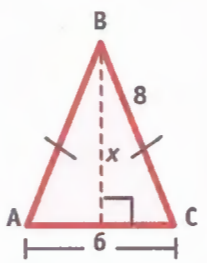
65 Un fabricante recibe un pedido especial de un cliente que necesita tornillos de 3,5 cm de largo y los aceptará siempre que el error en esa medida, por exceso o por defecto, no supere el 3%.

a) Escriban el intervalo de medidas aceptables por defecto y el de medidas aceptables por exceso.

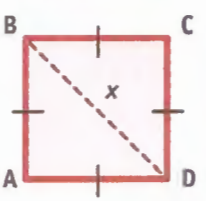
b) Si un tornillo midiera, exactamente, $\sqrt{12}$ cm, ¿sería aceptado?

66 Hallen el valor de x. Cuando sea necesario, redondeen a los centésimos.

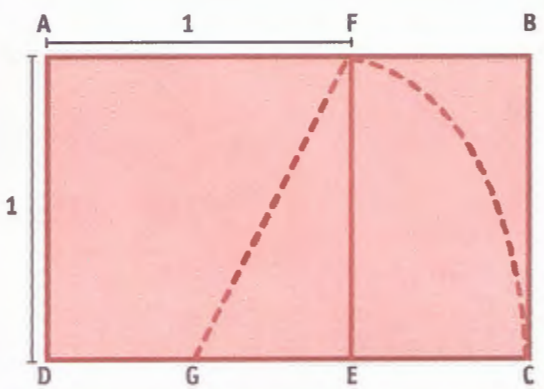
a)



b) Perímetro = 16



67 Observen el rectángulo ABCD, en el que $\overline{GC} = \overline{GF}$ y $\overline{DG} = \overline{GE}$.



a) Expresen la medida de $\overline{DC}$ de la forma más sencilla posible.

b) ¿Pueden relacionar la expresión anterior con algún número irracional conocido?

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 La inecuación $\left|\frac{x-3}{2}\right| \leq |-4+2|$ tiene como conjunto solución el intervalo:

- a) $(-\infty; -1)$
- b) $[-1; 7]$
- c) $[7; +\infty)$
- d) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$

2 $x_1 = 7$ y $x_2 = -5$ son soluciones de:

- a) $\sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{2} = 3\sqrt{8}$
- b) $\left|\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\right| = 3\sqrt{8}$
- c) $\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\right)^2 = 3\sqrt{8}$
- d) $\left(\sqrt{2}\,x\right)^2 - \sqrt{2} = 3\sqrt{8}$

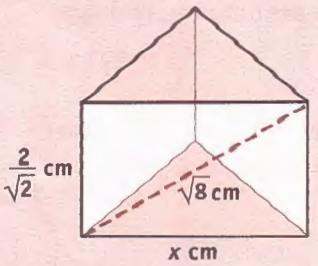
3 Una expresión simplificada de $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}}{a\sqrt[3]{a}}$ es:

- a) $a^{-\frac{13}{12}}$
- b) $a^{-\frac{1}{2}}$
- c) $a^{\frac{13}{12}}$
- d) $a^{-\frac{1}{6}}$

4 El valor de a es 2 en:

- a) $\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{8}}} = 2^{\frac{1}{2}}$
- b) $\sqrt[a+3]{5} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}$
- c) $\sqrt{\sqrt{a^3}} = 2^{\frac{3}{4}}$
- d) $\sqrt[a]{\sqrt{64}} = 2$

5 En la figura pueden ver un prisma triangular, formado por tres caras rectangulares iguales, y otras dos caras triangulares también iguales.



a) El área total del cuerpo es:

- I. $5\sqrt{3}$ cm²
- II. $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ cm²
- III. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm²
- IV. $9\sqrt{3}$ cm²

b) Una aproximación del volumen del cuerpo con $\varepsilon_a \leq 0{,}005$ es:

- I. 3,67
- II. 3,6
- III. 3,68
- IV. 3,7

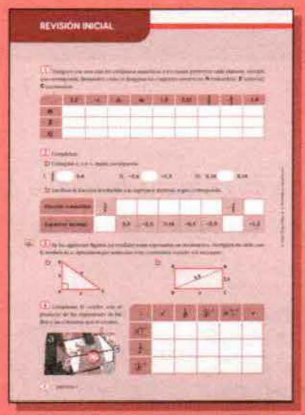
6 Si la suma de las aristas de un cubo es $6\sqrt{3}$ cm:

- a) La medida de una arista es $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ cm.
- b) La diagonal de una cara es $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm.
- c) El área total es 9 cm².
- d) El volumen es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm³.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

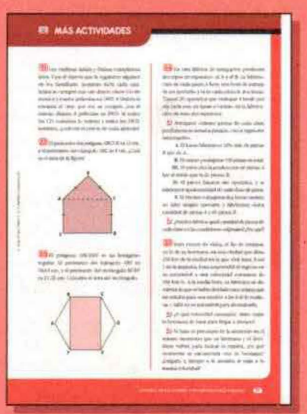
Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una presentación general del tema es el eje que abre cada capítulo.

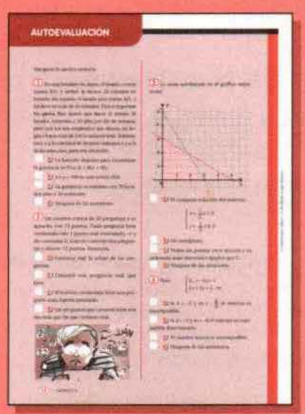


Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

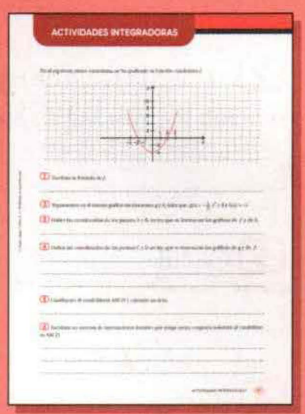
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados con aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



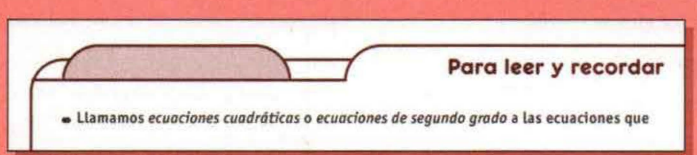
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



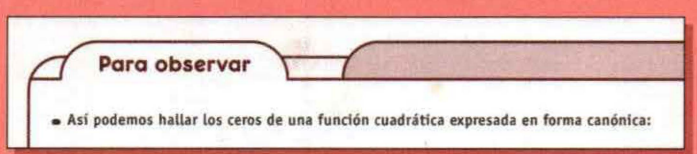
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 3 y 4, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE